

नाम

131

324 (EZ)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट ]

[पूर्णांक : 100

निर्देश :

- (i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।
- (iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।
- (v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।
- (vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।
- (vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

1. सभी खण्ड कीजिए । प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर उसे अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में  $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$  द्वारा परिभाषित सम्बन्ध है : 1

- (i) स्वतुल्य और सममित नहीं, किन्तु संक्रामक
- (ii) स्वतुल्य और संक्रामक नहीं, किन्तु सममित
- (iii) सममित और संक्रामक नहीं, किन्तु स्वतुल्य
- (iv) न स्वतुल्य, न सममित और न ही संक्रामक

(ख) यदि  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b\}$ , तो  $A$  से  $B$  तक फलनों की संख्या होगी : 1

- (i) 6
- (ii) 8
- (iii) 9
- (iv) 5

(ग)  $\lambda$  के किस मान के लिए सदिश  $\lambda \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  और सदिश  $\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$  लम्बवत् हैं ? 1

(i) -2

(ii) 2

(iii) 3

(iv) 4

(घ) समाकलन  $\int x e^{-x} dx$  का मान है : 1

(i)  $-(x+1)e^{-x}$

(ii)  $(x+1)e^{-x}$

(iii)  $(x-1)e^{-x}$

(iv)  $-(x-1)e^{-x}$

(ङ) अवकल समीकरण  $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 8y = \log x$  की कोटि है : 1

(i) 2

(ii) 3

(iii) 5

(iv) 6

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क)  $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए । 1

(ख)  $\cos(\sin x^2)$  का  $x$  के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए । 1

(ग) हल कीजिए :  $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ . 1

(घ)  $x$  के सापेक्ष  $\log_e x$  का समाकलन कीजिए । 1

(ङ) यदि  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$  और  $P(A|B) = \frac{3}{10}$ , तो  $P(A \cup B)$  ज्ञात कीजिए । 1

3. सभी खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह  $AB$  ज्ञात कीजिए यदि  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$  और  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ . 2

(ख) क्या  $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x-5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$  द्वारा परिभाषित फलन  $x = 1$  पर सतत है ? 2

(ग)  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए । 2

(घ) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिशों  $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  और  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$  द्वारा निरूपित हैं । 2

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क)  $N \times N$  में एक सम्बन्ध  $R$  निम्नवत् परिभाषित है :

$(a, b) R (c, d)$  यदि और केवल यदि  $ad = bc$ . सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता सम्बन्ध है । 2

(ख) 'a' का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अन्तराल  $[1, 2]$  में फलन  $f(x) = x^2 + ax + 1$  से प्रदत्त फलन वर्धमान है । 2

(ग) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} + y = 1$  ( $y \neq 1$ ) को हल कीजिए । 2

(घ) एक पासे को एक बार उछाला जाता है । यदि घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है' को  $E$  से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है' को  $F$  से निरूपित किया जाए, तो बताएँ कि क्या घटनाएँ  $E$  और  $F$  स्वतन्त्र हैं । 2

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि  $x, y, z$  विभिन्न हों और  $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 + 1 \\ y & y^2 & y^3 + 1 \\ z & z^2 & z^3 + 1 \end{vmatrix} = 0$ , तो दर्शाइए कि  $xyz = -1$ . 5

(ख) सिद्ध कीजिए :  $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$ ,  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . 5

(ग) यदि  $\cos y = x \cos (a + y)$  तथा  $\cos a \neq \pm 1$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$ . 5

(घ) दर्शाइए कि बिन्दु  $A(2, 3, -4)$ ,  $B(1, -2, 3)$  और  $C(3, 8, -11)$  संरेख हैं । 5

(ङ) हल कीजिए :  $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$ . 5

6. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि रेखाएँ  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$  और  $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$  लम्बवत् हों, तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए ।

5

(ख) एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योगफल 6 पाया गया । संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

5

(ग) व्यवरोधों  $3x + 4y \leq 60$ ,  $x + 3y \leq 30$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  के अन्तर्गत  $z = 8000x + 12000y$  का अधिकतमीकरण कीजिए ।

5

(घ) माना  $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ,  $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ,  $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ; तो दर्शाइए कि  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ .

5

(ङ) हल कीजिए :  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ .

5

7. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) समीकरण निकाय

$$x - y + z = 4$$

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x + y + z = 2$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए ।

8

(ख) यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ , तो सत्यापित कीजिए कि  $A(\text{adj } A) = |A|I$  और  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए ।

8

8. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ वाले लम्ब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है ।

8

(ख) सिद्ध कीजिए :

8

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$



9. कोई एक खण्ड कीजिए :

(क)  $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$  का मान ज्ञात कीजिए । 8

(ख) (i)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ii) यदि  $e^y(1 + x) = 1$  है, तो दिखाइए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  होगा । 3

(English Version)

**Instructions :**

- (i) First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.
- (ii) There are in all **nine** questions in this question paper.
- (iii) **All** questions are compulsory.
- (iv) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.
- (v) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- (vi) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- (vii) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. Do **all** parts. Select the correct alternative of each part and write it in your answer book. <https://www.upboardonline.com>

(a) In the set of real numbers, the relation  $R$  defined by  $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$  is : 1

- (i) not reflexive and symmetric, but transitive
- (ii) not reflexive and transitive, but symmetric
- (iii) not symmetric and transitive, but reflexive
- (iv) not reflexive, not symmetric and not transitive

(b) If  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b\}$ , then number of functions from  $A$  to  $B$  will be : 1

- (i) 6
- (ii) 8
- (iii) 9
- (iv) 5

(c) For which value of  $\lambda$  are the vectors  $\lambda \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$  and  $\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$  perpendicular ? 1

- (i) -2
- (ii) 2
- (iii) 3
- (iv) 4

(d) The value of the integral  $\int x e^{-x} dx$  is : 1

(i)  $-(x+1)e^{-x}$

(ii)  $(x+1)e^{-x}$

(iii)  $(x-1)e^{-x}$

(iv)  $-(x-1)e^{-x}$

(e) The order of the differential equation  $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 8y = \log x$  is : 1

(i) 2

(ii) 3

(iii) 5

(iv) 6

2. Do **all** the parts :

(a) Find the principal value of  $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ . 1

(b) Find the differential coefficient of  $\cos(\sin x^2)$  with respect to  $x$ . 1

(c) Solve :  $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$ . 1

(d) Integrate  $\log_e x$  with respect to  $x$ . 1

(e) If  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$  and  $P(A|B) = \frac{3}{10}$ , find  $P(A \cup B)$ . 1

3. Do **all** the parts :

(a) Find matrix  $AB$  if  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ . 2

(b) Is the function  $f(x)$  defined by  $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{if } x \leq 1 \\ x-5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$  is continuous at  $x = 1$ ? 2

(c) Evaluate :  $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} dx$ . 2

(d) Find the area of the parallelogram whose adjacent sides are represented by the vectors  $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  and  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ . 2

4. Do **all** the parts :

- (a) A relation  $R$  is defined in  $N \times N$  as follows :  
 $(a, b) R (c, d)$  if and only if  $ad = bc$ . Prove that  $R$  is an equivalence relation. 2
- (b) Find the least value of 'a' for which the function  $f(x) = x^2 + ax + 1$  is increasing on the interval  $[1, 2]$ . 2
- (c) Solve the differential equation  $\frac{dy}{dx} + y = 1$  ( $y \neq 1$ ). 2
- (d) A die is thrown once. If  $E$  represents the event 'the number obtained on the die is a multiple of 3' and  $F$  represents the event 'the number obtained on the die is even', then tell whether the events  $E$  and  $F$  are independent. 2

Do **all** the parts :

- (a) If  $x, y, z$  are all different and  $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 + 1 \\ y & y^2 & y^3 + 1 \\ z & z^2 & z^3 + 1 \end{vmatrix} = 0$ , show that  
 $xyz = -1$ . 5
- (b) Prove that :  $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$ ,  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . 5
- (c) If  $\cos y = x \cos (a + y)$  and  $\cos a \neq \pm 1$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$ . 5
- (d) Show that the points  $A(2, 3, -4)$ ,  $B(1, -2, 3)$  and  $C(3, 8, -11)$  are collinear. 5
- (e) Solve :  $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$ . 5

6. Do **all** the parts :

- (a) If the lines  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$  and  $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$  are perpendicular, find the value of  $k$ . 5
- (b) A die was thrown twice and it was found that the sum of the numbers that appeared was 6. Find the conditional probability that the number 4 appeared at least once. 5
- (c) Maximize  $z = 8000x + 12000y$  subject to constraints  
 $3x + 4y \leq 60,$   
 $x + 3y \leq 30,$   
 $x \geq 0, y \geq 0.$  5

(d) Let  $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ ,  $\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$ ,  $\vec{c} = c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}$ ; then show that  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ . 5

(e) Solve:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ . 5

7. Do any **one** part :

(a) Solve by matrix method the system of equations : 8

$$x - y + z = 4$$

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x + y + z = 2$$

(b) If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ , then verify that  $A(\text{adj } A) = |A|I$  and find  $A^{-1}$ . 8

8. Do any **one** part :

(a) Prove that the radius of the right circular cylinder of maximum curved surface inscribed in a cone is half of the radius of the cone. 8

(b) Prove : 8

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$

9. Do any **one** part :

(a) Evaluate :  $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x^2+1)} dx$ . 8

(b) (i) Find the area of the bounded region of  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 5

(ii) If  $e^y(1+x) = 1$ , then show that  $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ . 3