

131

324(FD)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

[पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
- vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- i) There are in all *nine* questions in this question paper.
- ii) *All* questions are compulsory.
- iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.
- v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- vi) Do not waste your time over a question which you cannot solve.

14000/1447

[Turn over

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a = b - 2, b \geq 6\}$ समुच्चय N में परिभाषित है तो सही उत्तर होगा

i) $(2, 4) \in R$

ii) $(3, 8) \in R$

iii) $(6, 8) \in R$

iv) $(8, 7) \in R$

1

ख) फलन $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान है

i) $\frac{\pi}{2}$

ii) $\frac{\pi}{3}$

iii) $\frac{\pi}{4}$

iv) $\frac{2\pi}{3}$

1

ग) सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ का मान होगा

i) 16

ii) 18

iii) 15

iv) 13

1

घ) फलन $\sin(x^2 + 5)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा

i) $2x \cos(x^2 + 5)$

ii) $2x \sin(x^2 + 5)$

iii) $\cos(x^2 + 5)$

iv) इनमें से कोई नहीं

1

ङ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$ तो α का मान होगा

i) $\frac{\pi}{6}$

ii) $\frac{\pi}{3}$

iii) π

iv) $\frac{3\pi}{2}$

1

1. Do all the parts of the following :

Write the correct alternative of each part in your answer-book :

a) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 2, b \geq 6\}$ is defined on the set N , then the correct answer will be

i) $(2, 4) \in R$

ii) $(3, 8) \in R$

iii) $(6, 8) \in R$

iv) $(8, 7) \in R$

1

- b) The principal value of the function $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ will be
- i) $\frac{\pi}{2}$ ii) $\frac{\pi}{3}$
- iii) $\frac{\pi}{4}$ iv) $\frac{2\pi}{3}$ 1
- c) The value of the determinant $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$ will be
- i) 16 ii) 18
- iii) 15 iv) 13 1
- d) The differential coefficient of the function $\sin(x^2 + 5)$ w.r.t. x will be
- i) $2x \cos(x^2 + 5)$ ii) $2x \sin(x^2 + 5)$
- iii) $\cos(x^2 + 5)$ iv) none of these 1
- e) If matrix $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then the value of α will be
- i) $\frac{\pi}{6}$ ii) $\frac{\pi}{3}$
- iii) π iv) $\frac{3\pi}{2}$ 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) वक्र $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ का बिन्दु $(2, -1)$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1
- ख) फलन $\sin mx$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 1
- ग) दो सदिशों \vec{a} और \vec{b} के बीच का कोण 0 है तथा $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ दिया है तो 0 का मान ज्ञात कीजिए। 1
- घ) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि ज्ञात कीजिए। 1
- ङ) $\int x^2 e^{x^3} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

2. Do all the parts of the following :

a) Find the value of $\frac{dy}{dx}$ of the curve $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ at the point $(2, -1)$. 1

b) Differentiate the function $\sin mx$ with respect to x . 1

c) The angle between two vectors \vec{a} and \vec{b} is 0 and $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$ is given. Find the value of θ . 1

d) Find the order of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^3 + \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad 1$$

e) Find the value of $\int x^2 e^{x^3} dx$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) अवकल समीकरण $y \log y dx - x dy = 0$ को हल कीजिए। 2

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो AB तथा BA ज्ञात कीजिए। 2

ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, $x = 0$ पर संतत है। 2

घ) यदि $y = x^3 + \tan x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। 2

3. Do all the parts of the following :

a) Solve the differential equation $y \log y dx - x dy = 0$. 2

b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ then find AB and BA . 2

c) Prove that the function $f(x) = x^2$ is continuous at $x = 0$. 2

d) If $y = x^3 + \tan x$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx$ को हल कीजिए। 2

ख) यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं, जहाँ $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{6}{10}$ हों तो $P(A \cup B)$ तथा $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। 2

- ग) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ हैं। 2
- घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

4. Do all the parts of the following :

- a) Solve : $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx$. 2
- b) If A and B are independent events, where $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{6}{10}$ then find $P(A \cup B)$ and $P(A \cap B)$. 2
- c) Find the area of a parallelogram whose adjacent sides are $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. 2
- d) There are two children in a family. If it is known that at least one child is boy in two of them, then find the probability that both the children are boy. <https://www.upboardonline.com> 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : (a-b) \text{ 5 का गुणज है} \}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5
- ख) यदि आव्यूह $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा आव्यूह $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ हैं तो X और Y आव्यूहों को ज्ञात कीजिए। 5
- ग) यदि $y = (\cot x)^{\sin x} + x^x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 5
- घ) ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 15 है और वर्गों का योग न्यूनतम हो। 5
- ङ) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

5. Do all parts of the following :

- a) Prove that a relation $R = \{(a, b) : (a-b) \text{ is a multiple of 5} \}$ is an equivalence relation in the set of integers Z . 5
- b) If the matrices $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ and $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ then find the matrices X and Y . 5
- c) If $y = (\cot x)^{\sin x} + x^x$ then find $\frac{dy}{dx}$. 5

- d) Find such two positive numbers whose sum is 15 and sum of their squares is minimum. 5
- c) Find the value of $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} dx$. 5
6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :
- क) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5
- ख) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$ हैं तो रेखाओं AB तथा CD के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 5
- ग) $Z = 4x + y$ का अधिकतम मान आलेख विधि द्वारा निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए : 5
- $$x + y \leq 50$$
- $$3x + y \leq 90$$
- $$x \geq 0, y \geq 0.$$
- घ) एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5
- ङ) अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$; ($x \neq 0$) का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 5
6. Do all the parts of the following :
- a) Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ surrounded by it. 5
- b) If the position vectors of the points A, B, C and D are successively $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$ then find the angle between the lines AB and CD . 5
- c) Find the maximum value of $Z = 4x + y$ under the following constraints by graphical method : 5
- $$x + y \leq 50$$
- $$3x + y \leq 90$$
- $$x \geq 0, y \geq 0.$$
- d) A die is thrown two times. It is found that the sum of appeared numbers is 6. Find the conditional probability that the number 4 appeared at least one time. 5
- e) Find the general solution of the differential equation $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2$; ($x \neq 0$). 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) आव्यूह विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरणों के निकाय को हल कीजिए : 8

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4.$$

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

7. Do any one part of the following :

a) Solve the following system of equations by using matrix method : 8

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4.$$

b) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 15 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ then find A^{-1} . 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) i) p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हों। 5

ii) दिखाइए कि बिन्दु $(2, -1, 1)$, $(1, -3, -5)$ तथा $(3, -4, -4)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। 3

ख) दो रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण निम्नवत् हैं : 8

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ और } \vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}).$$

8. Do any one part of the following :

a) i) Find the value of p such that the lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$

and $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are mutually perpendicular. 5

ii) Show that the points $(2, -1, 1)$, $(1, -3, -5)$ and $(3, -4, -4)$ are the vertices of a right angled triangle. 3

- b) Find the shortest distance between two lines l_1 and l_2 whose vector equations are $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and,
 $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$.

8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) समाकल $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x^2+1)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

8

ख) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

8

9. Do any one part of the following :

a) Find the value of the integral $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x^2+1)} dx$.

8

b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

8

324(FD) - 98,000

प्रचंड प्रयास