

131

324(FB)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट]

| पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note: First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all *nine* questions in this question paper.
- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question which you cannot solve.

12000/1221

| Turn over

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

क) फलन $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 5x, \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए :

- i) f आच्छादक है ii) f बहु-एकैकी है
iii) f आच्छादक नहीं है iv) f एकैकी नहीं है

ख) अवकल समीकरण $5x^2 \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^4 + y = 0$ की कोटि होगी

- i) 2 ii) 1
iii) 3 iv) 4

ग) समाकलन $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान होगा

- i) $\frac{\pi}{3}$ ii) $\frac{2\pi}{3}$
iii) $\frac{\pi}{6}$ iv) $\frac{\pi}{12}$

घ) व्यंजक $\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ का मान होगा

- i) 0 ii) 1
iii) 2 iv) 3

ङ) यदि A तथा B दो व्युत्क्रमणीय आव्यूह कोटि n के हैं तो

- i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ii) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
iii) $(AB)^{-1} = A^{-1}B$ iv) $(AB)^{-1} = AB^{-1}$

1. Attempt all the parts of the following :

Select the correct alternative of each part and write it in your answer-book :

a) Function $f : R \rightarrow R$ is defined by $f(x) = 5x, \forall x \in R$. Select the correct answer :

- i) f is onto ii) f is many one
iii) f is not onto iv) f is not one-one

b) Order of the differential equation

$$5x^2 \frac{d^3y}{dx^3} - 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^4 + y = 0 \text{ will be}$$

- | | | |
|--------|-------|---|
| i) 2 | ii) 1 | |
| iii) 3 | iv) 4 | 1 |

c) The value of the integral $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ will be

- | | | |
|----------------------|----------------------|---|
| i) $\frac{\pi}{3}$ | ii) $\frac{2\pi}{3}$ | |
| iii) $\frac{\pi}{6}$ | iv) $\frac{\pi}{12}$ | 1 |

d) The value of the expression $\hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$ will be

- | | | |
|--------|-------|---|
| i) 0 | ii) 1 | |
| iii) 2 | iv) 3 | 1 |

e) If A and B are two invertible matrices of order n then

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---|
| i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ | ii) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ | |
| iii) $(AB)^{-1} = A^{-1}B$ | iv) $(AB)^{-1} = AB^{-1}$ | 1 |

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ तो A से B में सम्बन्धों की संख्या ज्ञात कीजिए। 1

ख) दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है। दोनों पर पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

1

ग) यदि सदिशों $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं तो λ का मान ज्ञात कीजिए। 1

घ) यदि $P(A) = \frac{3}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ तो $P(B/A)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

ङ) यदि $y = \log_e(\tan x)$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 1

2. Do all the parts of the following :

- a) If $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, then find the number of relations from A to B . 1
- b) Two coins are tossed together. Find the probability of getting both tails. 1
- c) If the vectors $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are perpendicular to each other then find the value of λ . 1
- d) If $P(A) = \frac{3}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$ then find the value of $P(B/A)$. 1
- e) If $y = \log_e(\tan x)$, then find $\frac{dy}{dx}$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x-1|$, $x = 1$ पर संतत है। 2
- ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
- ग) यदि \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} मात्रक सदिश हैं और $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ तो $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
- घ) $\int \log x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

3. Do all the parts of the following :

- a) Prove that the function $f(x) = |x-1|$ is continuous at $x = 1$. 2
- b) Find the value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$. 2
- c) If the unit vectors \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} are such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$. 2
- d) Find the value of $\int \log x \, dx$. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) यदि $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 2
- ख) फलन x^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 2
- ग) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
- घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। 2

4. Do all the parts of the following :

a) If $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ then find $\frac{dy}{dx}$. 2

b) Find the differential coefficient of the function x^x with respect to 'x'. 2

c) Find the value of $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$. 2

d) Prove that the function $f(x) = |x|$ is not differentiable at $x = 0$. 2

5. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि दो सदिशों \vec{a} और \vec{b} के लिए सदैव $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ होता है। 5

ख) दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. 5

ग) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ को हल कीजिए। 5

घ) यदि $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) यदि $y = x \cos(a + y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$. 5

5. Do all the parts of the following :

a) Prove that for the two vectors \vec{a} and \vec{b} will always be $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$. 5

b) Show that $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. 5

c) Solve the differential equation $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$. 5

d) If $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ then find $\frac{dy}{dx}$. 5

e) If $y = x \cos(a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$. 5

6. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) एक पासे को तीन बार फेंका जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि प्राप्त अंकों में से एक अंक विषम संख्या होगी। 5

ख) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $Z = x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए :
 $2x + y \geq 3$, $x + 2y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 5

ग) हल कीजिए : $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$. 5

घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है तथा इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए। 5

ङ) सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होता है। <https://www.upboardonline.com> 5

6. Do all the parts of the following :

a) If a die is thrown three times, then find the probability of getting one appearing number in them will be odd. 5

b) Minimize $Z = x + 2y$ under the following constraints :
 $2x + y \geq 3$, $x + 2y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 5

c) Solve : $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$. 5

d) If $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, show that $A^2 - 5A + 7I = 0$ and also find A^{-1} with its help. 5

e) Show that the semi-vertical angle of the right circular cone of maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

ख) i) रेखा युग्म $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ तथा $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। 4

ii) यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के निर्देशांक $(1, 5, -1)$, $(0, 4, -2)$ और $(2, 3, 4)$ हैं तो इसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। 4

7. Do any one part of the following :

a) Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. 8

b) i) Find the angle between the pair of lines $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ and $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$. 4

ii) If the coordinates of mid-points of the sides of a triangle are $(1, 5, -1)$, $(0, 4, -2)$ and $(2, 3, 4)$ then find the coordinates of its vertices. 4

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) रैखिक समीकरण निकाय

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ हो तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

8. Do any one part of the following :

a) Solve the system of linear equations by matrix method :

$$2x - 3y + 5z = 11$$

$$3x + 2y - 4z = -5$$

$$x + y - 2z = -3$$

b) If $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ then find A^{-1} .

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

ख) $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. Do any one part of the following :

a) Prove that $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$.

b) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$.

324(FB) - 98,000